從「微積分簡介」看數學觀與數學教學觀

張家麟[1]
香港教育學院數學與資訊科技學系
黃毅英
香港中文大學課程與教學學系

[1]筆者們感謝梁玉麟教授提出的寶貴意見

ISBN 978-988-8040-72-8

目錄

前言

為配合香港數學教育的發展，並向教師提供更多參考資料，課程發展處數學教育組於2007年開始邀請大學學者及資深老師撰寫專文，並蒐集及整理講座資料，輯錄成《數學百子櫃系列》。本書《從「微積分簡介」看數學觀與數學教學觀》是這個系列的其中一冊，作者張家麟博士和黃毅英教授對中學數學教學素有研究。本書藉著介紹高中數學課程中的微積分的相關簡介及整個教學進展的思路，向讀者展示他們的數學觀與數學教學觀。本書內容精闢，不僅可供教師參考，其中介紹微積分部分亦可作為學生讀物。此外，本書只屬作者個人觀點，並不代表教育局的意見。

本系列能夠出版，實在是各方教育工作者共同努力的成果。在此，謹向提供資料、撰寫文章的老師、學者，以及所有為本書勞心勞力的朋友，致以衷心的感謝。

如有任何意見或建議，歡迎致函：
九龍油麻地彌敦道405號九龍政府合署4樓
教育局課程發展處
總課程發展主任（數學）收
(傳真：3426 9265 電郵：ccdoma@edb.gov.hk)

教育局課程發展處
數學教育組

作者簡介

張家麟，學數於香港中文大學數學系，先後獲學士、碩士及博士學位。研究興趣為非性偏微分方程。曾任職中學教師、香港教育學院及香港中文大學數學系導師，2005年獲中文大學理學院優秀教學獎。2006年7月任香港教育學院助理教授至今，對數學解難，以及幾何的教與學至感興趣。

黃毅英，文學學士、哲學碩士、教育證書、哲學博士（香港大學），文科教育碩士（香港中文大學），現任香港中文大學課程與教學學系教授。2001年獲香港研究資助局重點專案資助（Competitive Earmarked Grant）、2005年獲學院優秀教學獎、2006年第三屆全國教育科學研究優秀成果獎三等獎、2008年獲香港中文大學研究卓越獎、2010年中國數學教育研究會論文二等獎。著述也有一些，最新的是與一班研究生合寫的《教授現在告訴你！－如何開展教育研究？》。

蕭序

湯因比（Arnold Joseph Toynbee）是二十世紀名滿士林的英國歷史學家，他有一段自敘少年時代的經歷，我總會在一門數學通識課開始的時候轉述：

> 「大概十六歲時我面臨一項選擇，事後看去，當時我是不夠成熟作出明智決定的。那項選擇就是開始學習微積分，或者捨棄數學而把空出來的時間多讀希臘文和拉丁文的經典文獻。我放棄了數學，以後卻因而懊悔不已，但要作補救，為時已晚。......
> 學習微積分，儘管只作淺嘗，將會增強我對宇宙的認識，既重要亦富啓發。......
> 回想起來，我認定不應當給予我這項選擇。學習微積分，至少它的基礎部份，理應是必修的科目。微積分，有如一艘裝備齊全、揚帆出海的船，是現代西方偉大才智的一項表徵。」

看來，湯因比視微積分為人類思想史的重要成果，非僅用作科學研究、工程科技、工藝技術的有力工具。所以，不論理科或文科學生，認識微積分，都有它的價值。

在數學通識課上，通常我也講述另一段與微積分有關的故事。十九世紀俄國文豪托爾斯泰（Leo Tolstoy）以其如椽大筆寫成好幾部不朽巨著，其中一部《戰爭與和平》膾炙人口，當中有一段（第三部，卷十一，第一章）論及（他自己的）歷史觀，很有意思：

> 「只有採取無窮小單位作為觀察對象（歷史的微分，也就是人們各自的個人意向），並且臻致積分的藝術（也就是求得這些無窮小量的總和），我們才有希望明白歷史的規律。」

如果讀者懂一點微積分的概念，便會更好理解托爾斯泰這段話的含意。看來，文科生讀一點微積分也有些益處。

毅英和家麟寫了這本《微積分簡介》，就是要向全體中學生（不分文科理科）介紹這門學科的基本內容，撇開技術細節，揭示中心思想。類似的做法，就我所知有兩本書，可以拿來作參考：(1) Michael Spivak, *The Hitchhiker's Guide to Calculus*, Polished Pebble Press, 1995; (2) Qun Lin (林群), *Free Calculus: A Liberation From Concepts and Proofs*, World Scientific, 2008。與這個主題有關的是另外一本寫於二十世紀三十年代的德文著述，循另一條途徑努力，後來譯成英文本，即是：Otto Toeplitz, *The Calculus, A Genetic Approach*, The University of Chicago Press, 1963; reprinted, 2007。作者採取一個他命名為「起源及發展」的角度（但他强調那不等同「歷史」的角度），把微積分的主要思想抽絲剝繭地展示於讀者面前，讓課本上乾巴巴的知識添加了生氣勃勃的面貌。

在這本書裏，微積分內容其實只佔書的一半，還有另一半可是書的特色。另一半是為教師寫的，解釋了寫作的緣起，設計內容背後的理念，旁及符號的處理手法及數學語言的運用。更一般地，作者交代了他們的數學教學觀，正好以微積分簡介作為顯示這種數學教學觀的一個範例。

把微積分的一節獨立地抽了出來，可以用作課堂上的教材。相信作者的用意，這只是一個開端，難怪在結尾他們說：「願大家在這升級之路上，樂而忘返！」

蕭文强
香港大學數學系

二零一零年六月四日

楔子

經常有文科生反映，他們進入大學之後，在不同的學習（如經濟、社會科學等）領域中，還是要動用到不少高等數學，如矩陣和微積分等。不過他們所需要的，並不（只）是這些東西的複雜計算技巧，而是這些理論本身的意義及用處。以微積分為例，普及化電腦軟件的出現，一方面可將動態的數學思維與幾何關係，具體有效的呈現於學生面前，强化學習；另一方面，電腦軟件更可幫助學生輕鬆地完成大部分繁瑣的技術運算，讓學生可將精力集中於數學概念和關係的理解，從而明白當中的意義（make sense）所在。對訓練較弱，在中學只修讀過基礎數學內容的文科生而言，這也是他們所需要的。將來沒有文科生了（因文理已不分科），卻仍有只修讀過數學必修部分而缺乏微積分學習經驗的中學生，他們將來若要運用微積分，就需要較直接了當地了解當中的數學工具代表了些甚麼，它們背後的意義何在。縱使對於將來會在延伸部分學習微積分的學生，我們也不妨思考：我們還是像以往一般，讓他們無謂地沉浸於操練技術的細節上嗎？早在20年前，數學教育家已提到高科技下應有的轉變，應進行「調低技巧」（de-emphasis of skill），甚至有認為80%以上微積分教科書的練習均應刪掉（當中討論見黃毅英，1991a；1991b；Wong，2003）。這些都是我們值得再次反思的。如上所述，無論「文科生」也好，「理科生」也好，也須跳出操作性技巧的框框，了解數學工具的原意和來龍去脈。

從這個緣起，我們嘗試勾劃出微積分的相關簡介。這個簡介當然不能視為完整的教材，但已能展現了整個教學進展的思路。在草擬之後，我們發覺這種舖排顯現了我們的一種數學觀和數學教學觀。這些想法，比內容細節更為重要，值得和大家分享。但我們又不能不先交代整個教學內容來談相關的數學觀和數學教學觀。故此，本文將先表述當中的設計思路，然後將具體內容放在框線內。而更重要的在小教材之後，我們作出了回顧，帶出我們對數學教學的一些看法，一種數學觀和數學教學觀。

學習目的

首先要釐清這個小教材想達到的目的。很明顯，我們不是要「完整」地向學生介紹整套微積分（又甚麼叫做完整呢？），只是要培養有意識的微積分「用家」，即是讓學過這個教材的人能較有理據地運用微分和積分這兩個工具，除了「知其然」（know how）外，亦在某種程度上「知其所以然」（know why）。我們並不是滿足於這種「快速著陸」，在文末我們便會補充，當學生成功地建造了一些「橋頭堡」後，行有餘力，進一步對微積分和其他部分作更全面的了解。

內容的選取

現時一般學習微積分的進程，大概會如圖1所示。

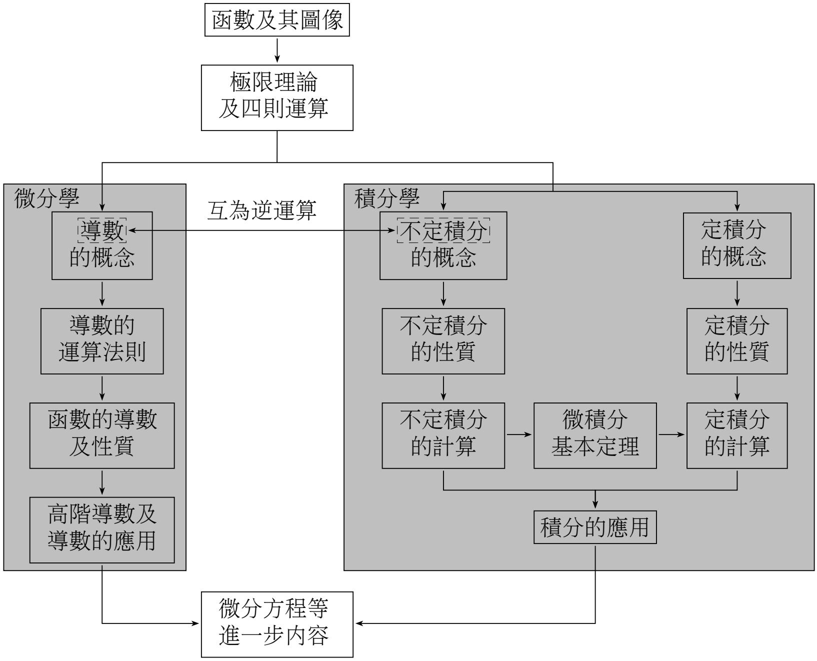


圖 1: 一般微分學習進程

當然（單變量的）微積分主要包含微分與積分。微分一般包含斜率、切線、變化率（rate of change）及微細增量（small increment）等意義。積分則為定與不定積分。假如我們稱一眾只需掌握最初等的微積分概念是以修讀大學（或其他方式的進修）的學習者為「基本用家」。作為基本用家，積分也不一定需要知道。但為了課題的完整性，我們還是保留了。至於微分的上述四種意義，因為這些基本用家主要不是利用微積分處理幾何，故此，集中斜率和變化率這兩個互相呼應的概念。我們認為學生若能搞通這兩個概念，日後有需要，不難引申到其他微分的用途。

所以，我們將微積分的進程，稍作鋪排，以「基礎版」、「升級版」和「繼續升級版」劃分內容，安排如圖2所示。

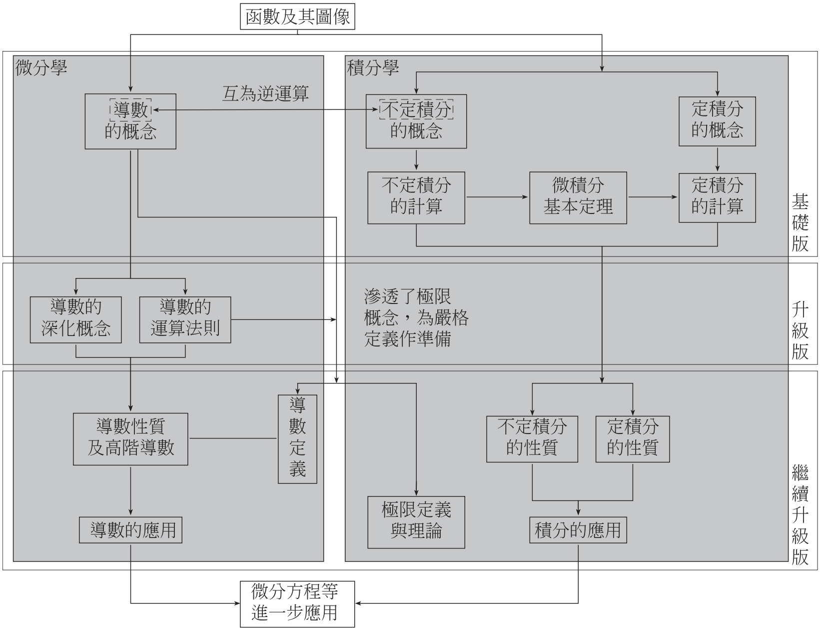


圖 2: 設計意念

作為「橋頭堡」基礎版之目的，是為基本用家介紹的微積分概要。但我們並沒有把極限概念作為先備知識。當然現代微分、積分的嚴格定義建基於極限，但首先我們不能說這是必然的（見文末之闡述）。而且他們亦不需要進行極限的各種運算（因為基本用家不必懂得從定義計算導數）。故此採取了滲透的方式，在計算一些基本函數的導數時，作為例子滲進了極限計算的一些技巧。讓學生體會變量趨於極限時，函數的變化與關係！這些學習經歷，對基本用家日後更深入的學習微積分，是十分重要的。事

實上，早在1990年代，縱使當年高深如高級程度純粹數學科，亦已用「極限的直觀意念」取代「$\epsilon-\delta$定義」，當中討論詳見黃毅英、馮振業（1997）。

作為升級版的內容，我們只進一步的討論導數的概念及其計算的法則，讓學習者體會多一些在技術層面上要求更高（僅高一點而已）的微積分內容。最後勾劃出「繼續升級路線」以供有興趣的基本用家，繼續他們升級之路，學習「繼續升級版」所提及的微積分內容。換言之，我們表面上好像淺化了學習內容，但其實舖成了學生進階學習之路。這條道路亦不只基於技巧之純熟性，而是對微積分的基本理解。

設計

以往微積分的學習中，學習者要耗費很多時間在繪畫函數的圖像，從而理解函數的變化；又或是進行大量計算、操練，以掌握繁複的計算技巧。現時透過電腦，繪圖及計算的時間都可省減，剩下的就是學習相關的定義、規律和應用[1]。定義用意義來取代，根本不用涉及極限。運算規律之嚴格證明亦只輕輕帶過就夠了。至於應用，可局限到變化率和極值。全課的精神是只介紹最基本的入門內容，也就是讓他們先從中掌握微分與積分兩個數學工具的意思和操

[1]當然電腦軟件，包括電腦代數系統（Computer Algebra System）和互動幾何（Dynamic Geometry）平台可發揮更多的作用。我們完全認同在教學過程中適當地採用電腦軟件。不過如何將電腦融入教授微積分，並非本文主旨，或可參考相關文獻。

作方法。不過我們再重申，這是基礎版的處理。讓學生在這麼大的課題中先建立「橋頭堡」，再進一步熟習深化。在香港，雖然現時學生一般不必學斜率或切線，不過本文亦順帶一提。至於積分，學生也不一定即時用得著，但這裡亦作出了簡介。

其中一個設計上的問題就是符號的引入。數學符號當然有助於概念的表達，有其必要性，但由於這一課太過抽象，所涉及的符號也十分之多。我們雖然已省去了極限的正式定義，但仍包括$\frac{d}{dx}$，$\frac{d^2}{dx^2}$，$\int$，$\int_a^b$，$F(x)|_a^b$等符號之引入，知道這些通用符號是有所必要（起碼可以用來閱讀其他書籍）。但我們亦可以鋪排一下。首先，我們選擇暫時不提$\frac{d^2}{dx^2}$，因為他們不會經常用到。至於其他符號，我們盡量採取漸進式引入，即先不介紹正式符號，而講解其中理念，再慢慢正規化（formalise）。我們認這樣符號的出場會更貼近具體處境（contextualised）一點。此外，在整個教材的不同部分亦體現了我們的一些想法，稍介紹如下

- 利用「先行組織」，讓學生有整課的概括認識【1】[2]。
- 引入變化率的進路：由線性到非線性。較常見的非線性就是自由落體【2】。
- 盡量用日常語言首先建立理解，如「走勢」等。由於這些用詞不嚴謹，故此出現了「走勢」、「走勢率」

[2]下面教材之內標示出【1】之處便是這一點具體落實的地方，如此類推。

等兀突之詞，後才漸漸發展至正式的數學名詞（我們不用曲線的斜率，因為嚴格來説，它是函數在某一點切線的斜率）。不過在實際教學上，如果學生能接受，也可直接介紹數學名詞（因時制宜）。學生在初中是學過「函數」這個名詞的，但在講解時也是先利用「走勢」、「曲線」等概念作引入，往後才過渡到用「函數」這名詞來作更深入的討論【3】。

- 先讓學生「用一用」（計算一實例的斜率）。這在「邏輯」上是倒過來的。一般的做法是先談規律（定理），再應用。但這會有更大的實質感【4】。

- 導數規律（1）—（4）是較技術的一環，其實縱使省掉了，對於基本用家不會有太大損失，因為他們根本不會動用這些規律作運算，雖然在後面解釋$\int f(x)dx = F(x) + C$會用到「$\frac{d}{dx}(F(x) + C) = \frac{d}{dx}F(x) + \frac{d}{dx}C = f(x) + 0 = f(x)$」，不過若省掉了就變成只是按鍵，學生感到太機械性，故此稍為説明一些原理也是好的。而且這些運算規則其實可以返過來加深概念的認識和了解。事實上，Sfard（1991）等人指出運算和理解並非割裂。但和不少課題的處理一樣，我們盡量以一兩個例串透，不要用符號嚇怕他們，如（1）、（2）的例合起來就是（3）的例。此外，本來可不介紹$\frac{d}{dx}$的符號。一來這是基本常識，二來在積分會用到，引入的方式亦是採取過渡的方法，就是先用「導數」這個詞。經過數度使用「導數」這個詞後，才轉到$\frac{d}{dx}$這個符號，但為免混亂，

暫時仍局限於使用$\frac{d}{dx}(y)$而不用$\frac{dy}{dx}$，用熟了，便可轉到$\frac{dy}{dx}$【5】。

- 用 y 還是 $f(x)$？學生於初中是學過 $f(x)$ 的，當然 $f(x)$ 比 y 方便。但對於 $y = 2x + 1$，$y = x^2$ 等，學生又慣於 y，故此本文亦考慮先用 y，再漸漸過渡到 $f(x)$。

- 透過繪圖軟體，學生對函數有整體認識，那根本不用懂得利用$\frac{d^2}{dx^2}$去判別拐點的性質，可在「升級版」再觸及【6】。

- 其實微積分亦牽涉許多「潛規則」，不管文理科學生均須了解，這些潛規則又不直接涉及定義，故此，縱使用得微積分較多的學生（所謂傳統的理科生），亦未必一時能夠掌握。除了上面所說的 y 和$f(x)$，$\frac{d}{dx}(y)$和$\frac{dy}{dx}$外。另一就是由 a 到 x 的轉移（所謂給定任意的 — arbitrary but fixed）。$y = x^2$在a點的導數為$2a$，但又可寫作$\frac{dx^2}{dx} = 2x$（參閱具體內容：「導數怎麼落實到每一點」【4】）。到討論微分法則（1）-（7）時，我們無法避免這種轉移，故最好作出一些解說。此外$f \pm g$、fg其實涉及函數的相加（而不僅為值的相加）、相減或相乘，對於一些學生來說，也是需要一點說明的【7】。

- 我們的原意並不是要對照現時中學的微積分課程，編寫相應的教學構想。編寫本文的出發點，是要為一些在未來入讀大學的非理、工科學生介紹微積分。我們

認為一些對複雜的數學技術不太稔熟的同學，也可以把微積分作為基本的工具並能開始掌握其背後的意義，由此繼續擴充、「升級」，讓他們在將來，可像理工本科生一樣，面對一些理工學科的深刻結果，並能了解個中意義。而其實理工本科生亦需有這樣的了解的。故此，我們嘗試為他們在「意念」，「定義、定理、證明」和「做數」（問題解決）等各層面扣起來，讓他們對微積分有最初步的認識。

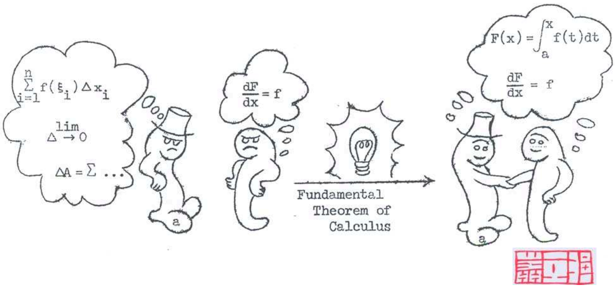
除了本文所介紹的內容外，在現時新高中數學課程延伸部分（單元二）還有其他的微積分內容，我們不打算作出詳述了（可參考黃毅英、張家麟、韓藝詩，2009）。反正討論這些內容的書甚多，而且我們相信，攪通了本文的內容後，要再進一步，並不困難！我們只在這裏花一些小小的篇幅，勾劃一下繼續升級路線，給大家有一個了解。【8】

最後，我們想一提紙上教材的局限性。學微積分真的是可以那麼輕鬆嗎？我們覺得真的可以，不過由於篇幅有限，很多表述都很濃縮，且沒有練習（故此節奏感覺上快了點）。此外，中間涉及很多動作，如

$$\frac{dx^9}{dx} = 9 \overset{\text{變}}{\curvearrowleft} x^{9 \longrightarrow (9-1)} = 9x^8$$

及圖示無法在紙上表示。若利用這篇文稿的意思，加上老師利用黑板或電腦軟件講述，學微積分（起碼以懂得運用微分與積分這兩個數學工具而言）真的可以

很輕鬆的。



1976 [3]

[3]本頁精采生動之漫畫乃蕭文强教授惠賜，謹此致謝！

微積分是甚麼？

「微積分」的英文為calculus，是計算的意思[4]。這門學科的全名其實為infinitestimal calculus，就是對微量（無窮小量）的計算。從中文譯名就很清楚了，這個課題基本上包含了「微分」和「積分」兩個工具，現先介紹微分。【1】

幹嗎要新的工具？

假如一間商店2005年1月開業，2月售出貨品為3000件，3月再計算一下，售出貨品為6000件，4月為9000件……銷售情況十分穩定。故此每月的銷售額為3000件，亦即銷售率為3000件／月，情況十分簡單（圖3）。

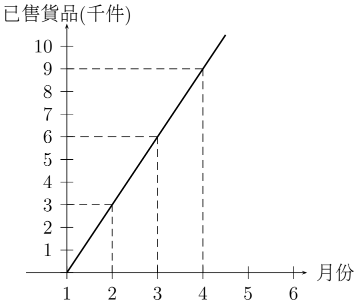


圖 3: 2005年銷售率

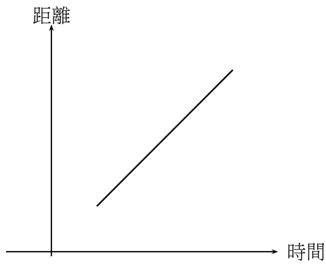


圖 4: 速率

同樣道理，若一個人以每秒1.5米的均勻速度跑步，他的速率就是 1.5米／秒（即1.5m/s），於是可算出例如8秒

[4]拉丁語中calculus可解作「石子」，由此可看出古代利用石子進行計算的痕跡。

之後，他就跑了 8×1.5 米，即12米（圖4）。人跑步不會那麼均勻，少不免時快時慢。但若波幅不太誇張，我們考慮平均速率就算了。

但若果我們把東西在窗外放手，它跌到地面的過程是會愈降愈快的。物理學家已經找出了它是以$y = x^2$的方式下降（圖5）。換言之，第1秒可能走了1米（其實中間還有一點點的調整，即要乘以一個倍數，但為了易於表述，姑且假設1秒走1米）。第2秒後不是共走了2米，而是4米（$4=2^2$）。第3秒共走了9米......，那末，我們就再不能用平均速率的方式來計算了。【2】

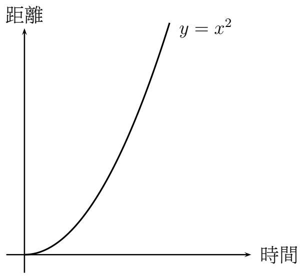


圖 5: 加速

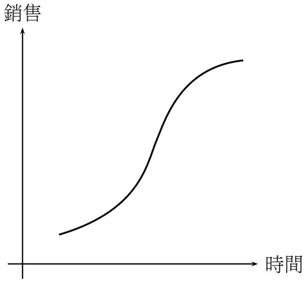


圖 6: 不平均之銷售

同理，貨品的銷售情況也往往不穩定，如有起有跌，有賺和賠......（圖6），於是我們就需要新的工具。

新的工具是甚麼？

對於均勻的跑步，要計算平均速率就很簡單，一般是看總數。例如上面跑步的例子，這個人從9時開始，跑了5秒，

共跑了7.5米，那末，他的（平均）速度就是（$\frac{7.5}{5}$米／秒），即1.5米／秒（圖7）。其他銷售率等也是一樣。

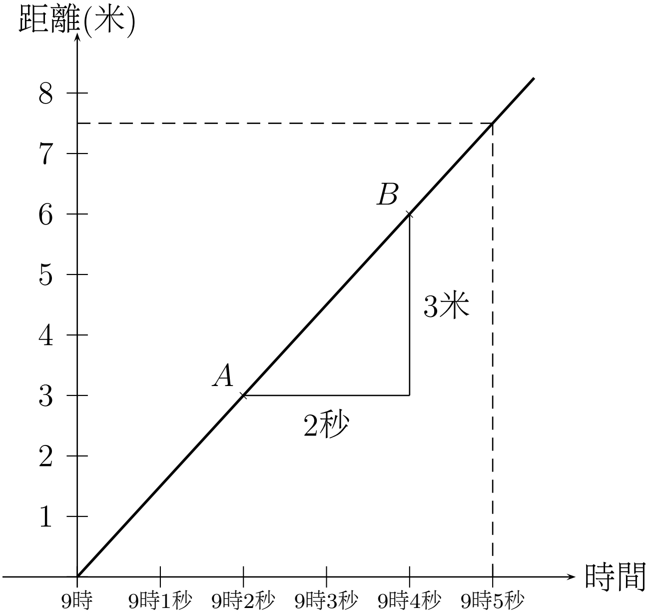


圖 7: 平均速率的計算

不只如此，其實我們也不一定等他跑完。既然是均匀，我們在任何時間測量都可以。例如從他跑了2秒才開始計（A點），至跑到4秒（B點）發覺在這兩點之間，他用2秒($B-A$)跑了3米($f(B)-f(A)$)。那末他的速率是$\frac{3}{2}$（米／秒）$\frac{f(B)-f(A)}{B-A}$。亦同樣是1.5米／秒（均匀速度嘛！）。

但若對著不均匀速度就不同了。明顯地，在圖8中，粗略的估計便可看出，在A點附近的「變化速率」與在B點附

近的「變化速率」是的不同的[5]。

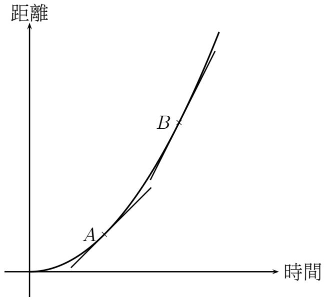


圖 8: 不平均速度的運動

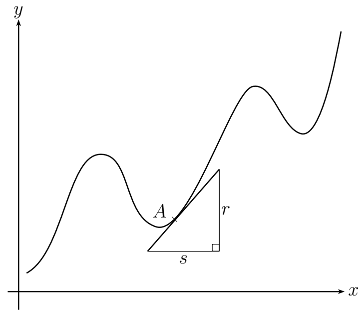


圖 9: 斜率

一般來說，對於任何這一類型曲線，無論跑步也好，銷售率也好，對於某一點A（圖9）的「走勢率」（就是那一點變化的程度），就叫做這個曲線在A點的「**導數**」（又或說把這個函數「**微分**」。我們若在這一點畫一個圖9這麼的一個「斜坡」，所要找的導數就是 $\frac{r}{s}$，斜坡的斜率！【3】

導數怎麼算？

事情越來越清楚了，對於一條曲線中某一點A，要找出A點的斜率，我們就在該點畫一個「黏」著點A的直角三角

[5]粗略的估計可進行如下，在A點附近的「變化速率」與在B點附近的「變化速率」是的不同的。例如，在圖8中，A及B點附近，我們分別取A'及B'兩點，例如$A' < A$及$B' < B$，A'很接近A及B'很接近B，並使$A - A' = B - B'$，比較便會發現$\frac{f(A)-f(A')}{A-A'} < \frac{f(B)-f(B')}{B-B'}$，因為$f(A) - f(A') < f(B) - f(B')$。

形，然後算出 $\frac{r}{s}$ 就可以了（圖10a）。但這樣好像不太精準，一個更好的方法是找出鄰近的另一點B（圖10b），然後算出AB的斜率，亦即

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

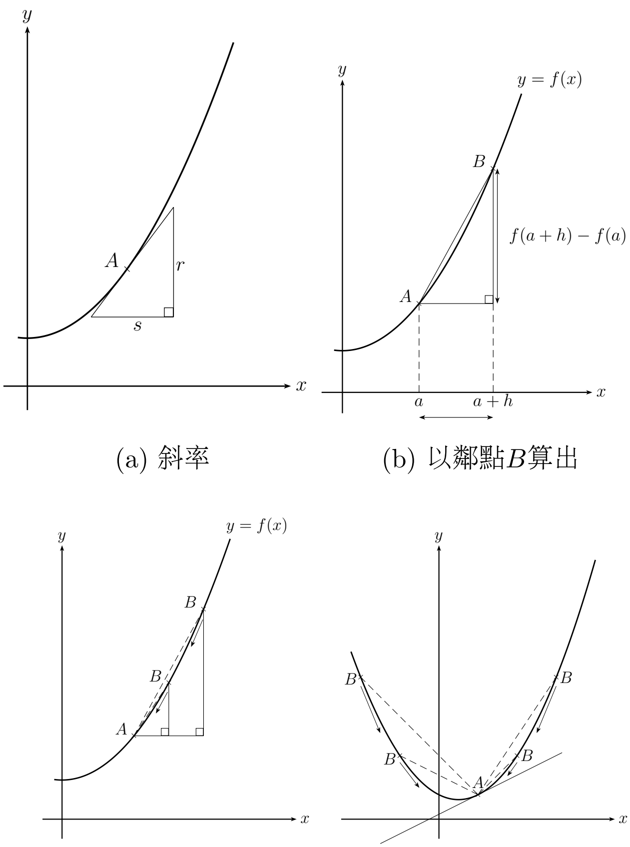
就可以了。不過，明顯地線，這和真正的斜率有一點距離，於是我們把h縮短一點（圖10c），最終極的比率就是我們要找的導數了。

當然我們也可以（應該）左右兩邊都做一做（圖10d）。兩邊的終極比率相同才算是我們要找的導數。

導數怎麼落實到每一點？

現在最核心的問題是導數怎麼找出來呢？不用急，現時電腦軟件那麼先進，常見函數的導數變得很容易。我們反而應首先看看導數是甚麼一回事（上面已談過了）和找到了導數之後，怎樣算出每一點的速率。

再次以$y=x^2$為例（圖5已見過了），數學家已為你算出來了，它的導數是$2x$（在下面我們再為您解釋何以$y=x^2$的導數是$2x$）。這是甚麼意思呢？即是說，對於不同的點(a,a^2)。我們只須把x坐標的「a」代進「$2x$」就可以得出這點的速率，也就是$2a$。再具體一點，例如在圖11中的A點，當時3秒過去了，$x=3$，$2x$就是6。換言之，在A點的速率為6m/s。在B點，x為7，$2x$就是14。



(a) 斜率

(b) 以鄰點B算出

(c) 透過移動B得出更準確斜率

(d) 左右迫近

圖 10: 算出導數

速率也就是14m/s。你看，不是加速了嗎？（由6m/s加到14m/s）。【4】

為了方便書寫，數學界有一個符號作表示導數的，就是$\frac{d}{dx}$。$\frac{d}{dx}$是一個總體的符號，「—」不是分線，也不能把

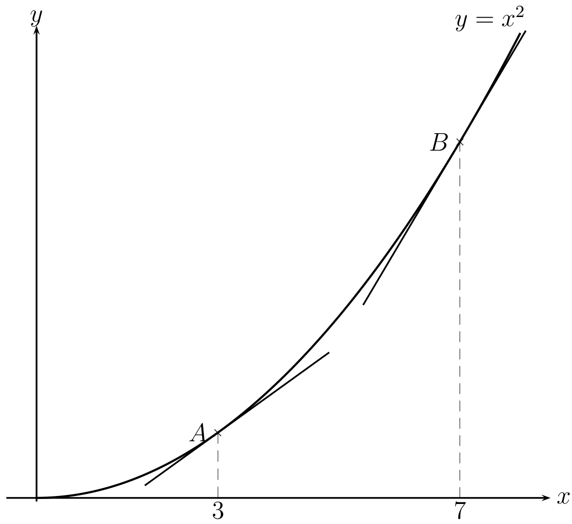


圖 11: 速率如何算到每一點

兩個「d」約掉。即

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x \quad 【5】$$

導數有些甚麼規律？

雖然說，在實際用途上電腦軟件可替我們找出大部分常見函數的導數。我們也好了解它的一些最基本規律，以便將來作「升級學習」作準備。【6】

常見函數的導數不難計算，因為數學家們已為我們確立了一批常見函數的導數。

法則（1）

首先，**常值函數$y = k$（k為常數）的導數為0**。想像一個人在跑道上的100m點沒有動，例如在12：00和1：00都在那一點上，當然他的速率就是0了。用圖9的講法 $r = 0$，無論s是如何，斜率都是$\frac{0}{s} = 0$，故此$y = k$的導數是0，我們可以寫$\frac{d}{dx}(k) = 0$（圖12）。

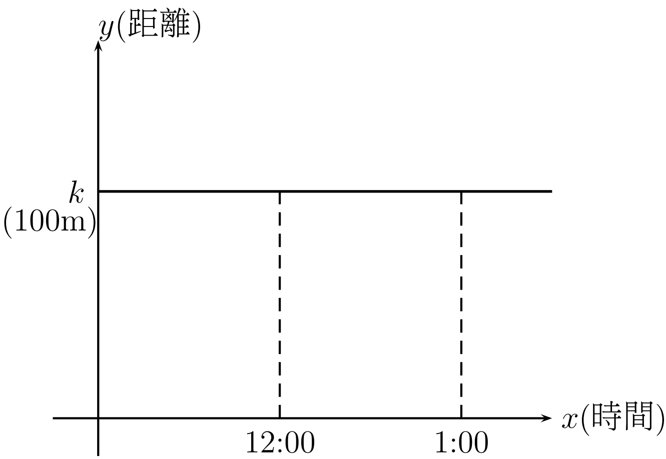


圖 12: $y = k$的導數

法則（2）

x^n**的導數為**nx^{n-1}（n為正整數）。故x^2的導數為$2x$；x^8的導數為$8x^7$。以$y = x^2$為例，讓我們看看x點的速率。用以往計速率的辦法，看看h（秒）之後去了哪裡。它就

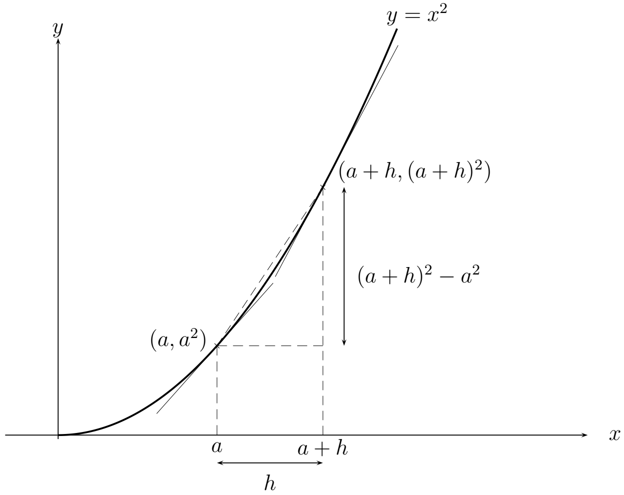


圖 13: $y = x^2$之斜率

由(a,a^2)去了$(a+h,(a+h)^2)$。故此，「速」率（斜率）就是

$$\begin{aligned}
&\frac{(a+h)^2-a^2}{h} \qquad \text{〔圖13〕}\\
&= \frac{\cancel{a^2}+2ah+h^2-\cancel{a^2}}{h}\\
&= \frac{\cancel{h}(2a+h)}{\cancel{h}}\\
&= 2a+h
\end{aligned}$$

例如$h = 1$秒，那就是比較了1秒後的平均速率，這不準確。因為這個人愈跑愈快，他在x的位置時的速率應該沒那麼快，故此看$h = \frac{1}{2}$秒會更準確點......當 h 愈縮愈小（暫且如此說：「最終」變成0），就知道當時的速率（斜

率）其實是$2a$（代入了$h = 0$）。換言之，(a, a^2)點的導數（斜率）是$2a$，一般而言$y = x^2$的導數就是$2x$，亦可寫作$\frac{d}{dx}x^2 = 2x$（圖14）。

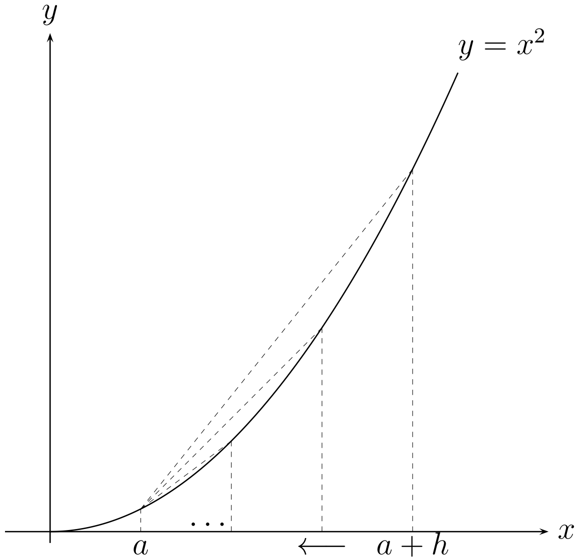


圖 14: 透過斜率計算導數

對於其他的n，這裡不作詳細計算了。以前的人已為你計妥了，就是$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$。其實後來數學家證明這條式對於其他$n$（不一定是正整數）也是對的。

法則（3）

數字倍大可照搬。例如$9x^2$的導數為$9(2x) = 18x$；$5x^8$的導數為$5(8x^7) = 40x^7$。這個十分明顯，由$y = x^2$到$y = 9x^2$只是把y軸拉長了9倍（圖15、16），

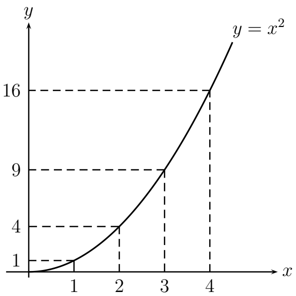


圖 15: $y = x^2$的圖像

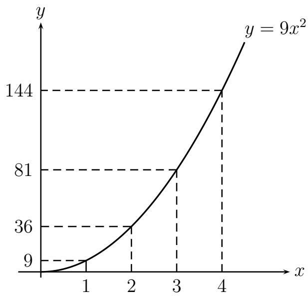


圖 16: 由x^2到$9x^2$的變化

故此在計算如圖16時的斜率時，他增長了9倍。很自然地，所計出來的$\frac{d}{dx}$也就是9倍原來的，也就是$\frac{d}{dx}(9x^2) = 9\frac{d}{dx}(x^2)$（即 $9(2x) = 18x$）。一般而言$\frac{d}{dx}(ky) = k\frac{d}{dx}y$。

法則（4）

加減可拆開來做。如（$5x^8 - 9x^2$）的導數為（$40x^7 - 18x$）就是這麼簡單。這就不詳細説明了，有興趣的可先想想兩個函數加起來是甚麼意思，就可慢慢瞭解$f(x)+g(x)$的斜率與$f(x)$和$g(x)$的斜率間有甚麼關係（見圖17）。這裏，我們暫不作詳細解釋，到「升級版」，再討論這問題【7】。

上面提過現時透過簡單的電腦軟件如Derive ®等，一按鍵就出來了。我們也不必特意去學習Derive ®這個軟件，因為它只是這類軟件的其中一個。

Derive ®亦包含在一些計算機中。這裏只是想説明，實際運算可交給電腦去做就可以了。對於更複雜的函數

如sin,cos,log,...... 又或兩函數的相乘和相除等，亦有其規律。不過利用Derive ®等，我們也不用費神了。

再重溫一下，例如某個走勢（無論跑步也好，銷售也好，甚至股價，經濟走勢 ......）是$5x^8 - 9x^2$，利用電腦知道它在某一點的增長率為$40x^7 - 18x$。這是甚麼意思呢？以速度為例，例如在30秒後（$x = 3$），它的速率為$40(3)^7 - 18(3) = 87426$（m/s）。那就完成了。

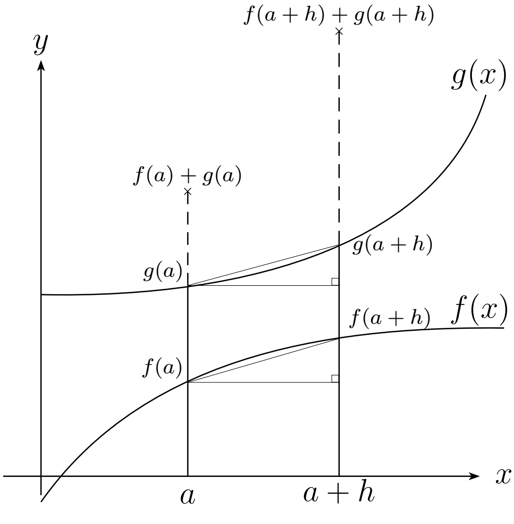


圖 17: $f(x) + g(x)$

微分還可以給我們些甚麼？

有時我們不只想計算速率，還想看看甚麼時候會「掉頭向下」（圖18中B點）或「v型反彈」（C點）。在圖18中，A

點就是普通的點，它正在向前走，導數為正數，故此速率也是正數。對於D點，速率是負數，走路的人與起點愈來愈近，即是說，他在掉頭走。但對於B點和C點，「斜坡」是平的，換言之，B、C點的速率是0，也就是說，這個人在駐足。

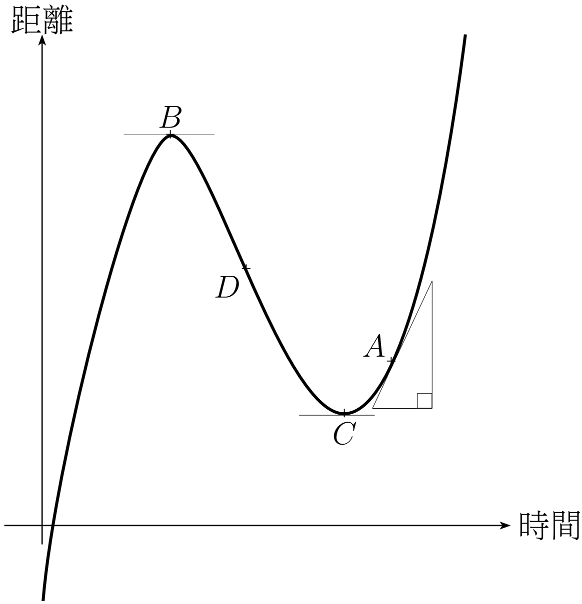


圖 18: 最大值和最小值

以上面$y = 5x^8 - 9x^2$為例，要找出「掉頭向下」或「v型反彈」，看看它的導數何時等於0就可以了，即

$$40x^7 - 18x = 0$$

$$2x(20x^6 - 9) = 0$$

即$x=0$或$x=\sqrt[6]{\frac{9}{20}}$（≈ 0.88)。

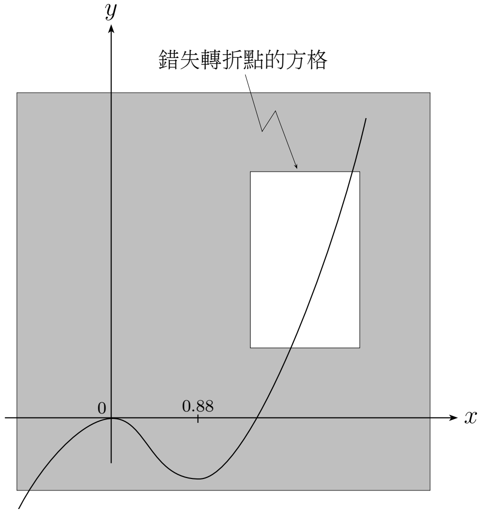


圖 19: 最大還是最小

那究竟這兩點是「掉頭向下」呢還是「v型反彈」呢？以往我們要透過複雜的方法才可決定，現時透過 Winplot ®等軟件（不少是分享軟件）就可得出整個走勢（圖19）。您可能問，為何不一早用Winplot ®，那就可省去上面的計算。但用Winplot ®總是要給電腦設定一個範圍，沒有上面的計算，有可能遺漏轉折點在所畫之方格外，即想要找的0.88在範圍之外。

這就是您所須要知道的微分基礎知識【8】。

那積分又是甚麼？

微分學過，現在轉過來認識積分了。積分有兩個。**定積分**和**不定積分**。從下面可以看到，它們有點「一而二，二而一」。我們先談定積分。

假如一個推銷員，每個月有一個營業額，由2005年1月到2009年12月的營業額如圖20。他5年來的營業額總數就很簡單，把這60個月的營業額加起來就是了。

那麼如果曲線（函數）的情況又如何呢？直觀而言，對於圖20總營業額就相等於把逐個月的數量加起來。假若這麼巧，每月的數量一樣（圖21）。這種相加就等於將逐月營業額（5萬）$\times 60$，不是嗎？乘就是連加嘛，我們小學時就已學過了。它也就是距形的面積，兩數相乘就是積嘛！

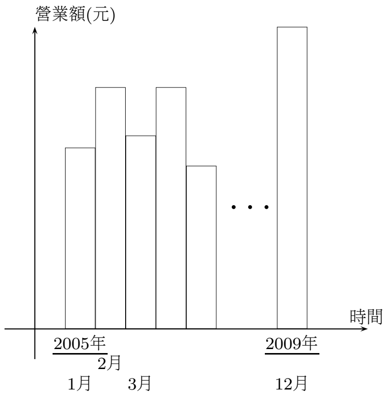


圖 20: 2005-2009年推銷員的營業額

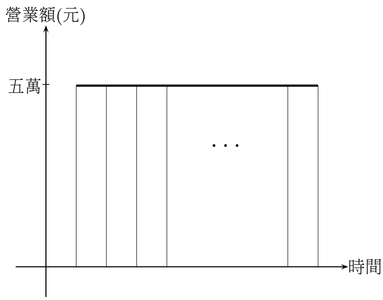


圖 21: 「積」就是「連加」

對於函數$f(x)$（當然我們假設它在x軸之上，不在下面也不會跨過x軸，亦即$f(x) \geq 0$。否則也可處理的，不過這裡不談了），以圖22的降雨量為例，總降雨量也可想像為把「每一片」加起來，亦即函數圖像$y = f(x)$，x-軸，$x = a$及$x = b$所圍成封閉圖形（就是斜線陰影的部分）的面積（圖23）。面積的計算在數學上是有廣泛的應用的哩！因為從上面看到「面積」有更廣泛的意義，就是累積與總和，在不少場合都會派用場。

以降雨量為例，一段時間（由a點到b點）的累積降雨量就叫做$f(x)$從a到b的「**定積分**」，用$\int_a^b f(x)dx$表示。a稱為**定積分**的**下限**，b稱為**定積分**的**上限**。

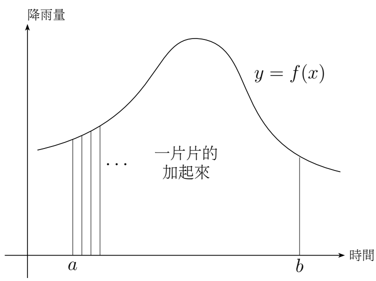


圖 22: 降雨量

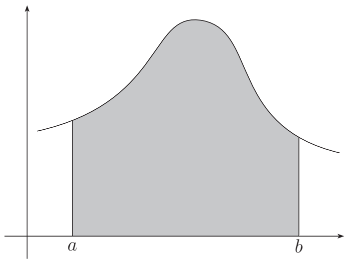


圖 23: 降雨量

定積分如何計算？ — 不定積分的引入

但是每次要逐片加起來不是很麻煩了嗎？不用愁，牛頓祖師爺（承接著他先驅者的結果）已替你「搞掂」了。牛頓（Isaac Newton，1643-1727）是英國的數學及物理學家，微積分、古典力學的始創者及天體物理學的開拓者。原來

透過微分的「還原」就可以處理這個面積問題（也就是定積分）。那末，讓我們暫時把定積分放在一旁，先探討微分的還原。

從上面已看到：

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x \text{ 。}$$

反過來，找出$2x$是從甚麼函數微分而來的這個過程就叫不定積分。亦即

$$x^2 \underset{\text{不定積分}}{\overset{\text{微分}}{\rightleftarrows}} 2x$$

我們用「$\int$」這個符號來表示。雖然同樣是「$\int$」，它**暫時**和「$\int_a^b$」沒有關係，因為它不涉及上限和下限，故稱為不定積分。下面我們才把兩者連繫起來。換言之：

$$\int 2x dx = x^2$$

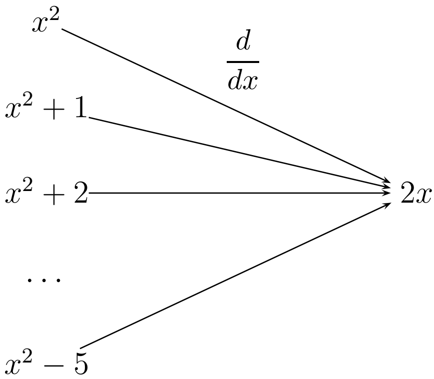
或者

$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2$$

換言之，

$$\begin{tikzcd} x^2 \arrow[r, bend left, "\frac{d}{dx}"] & 2x \arrow[l, bend left, "\int"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \frac{1}{2}x^2 \arrow[r, bend left, "\frac{d}{dx}"] & x \arrow[l, bend left, "\int"] \end{tikzcd}$$

雖然$\frac{d}{dx}(x^2)$確是$2x$，但是$\frac{d}{dx}(x^2+1)$、$\frac{d}{dx}(x^2+2)$、$\frac{d}{dx}(x^2+7)$、$\frac{d}{dx}(x^2+(-5))$（即$\frac{d}{dx}(x^2-5)$）等都是$2x$！（大家試試利用上面（1）至（4）的法則解釋何以$\frac{d}{dx}(x^2+1)$也是$2x$！。）即



故究竟$2x$還原後（即$\int(2x)dx$）是哪一個呢？數學家索性就用

$$\int(2x)dx = x^2 + C$$

又或

$$\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

來表示，當中的C表示一個固定的常數。不過有時數學家索性寫

$$\int xdx = \frac{1}{2}x^2$$

就算了（即$C=0$）。

定積分的計算—定積分與不定積分的神奇關係

這個不定積分又如何協助我們計算定積分呢？這就是牛頓的偉大發現 — 微積分基本定理，這發現大大簡化了定積分的計算！

微積分基本定理——定積分與不定積分的神奇關係：

（粗疏版）對於不太「古怪」（參考圖24）且不斷裂的函數$y = f(x)$，若它確有一個「還原」（即不定積分）$F(x)$可被求得，那末

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \text{ 。}$$

備註：

(i) $y = f(x)$ 的「還原」雖然有很多不同的選擇，但只要選定其中之一，再代入a及b計算$F(b) - F(a)$，便可求得正確答案。重要的是$F(b) - F(a)$式中的$F(x)$，必須前後一致。

(ii) 「還原」的聰明選擇，自然是選$C = 0$ 的表達式，令計算方便快捷！

例如我們若要計算$\int_3^4 xdx$，現時事情就變得簡單了，無須確實計算相關的面積。我們先找出「x」的$\frac{d}{dx}$的「還原」，

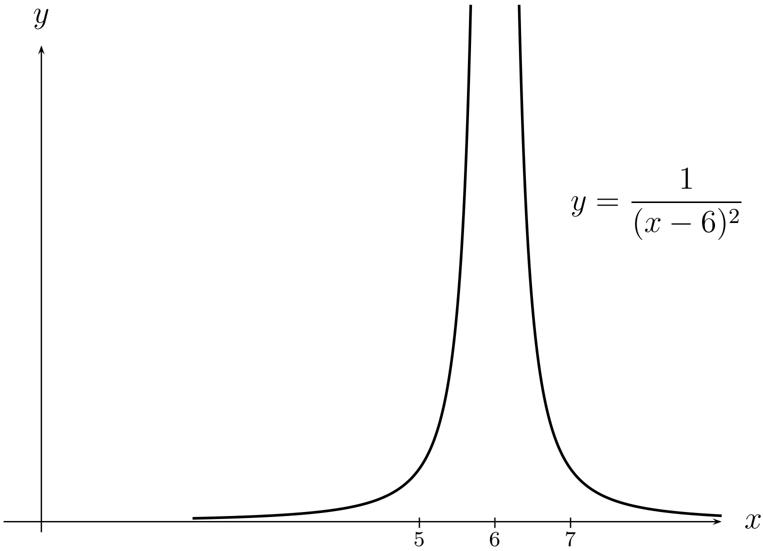


圖 24: 「古怪」的函數

即是

$$\int xdx$$

也就是$\frac{1}{2}x^2$了（我們的聰明選擇！）。然後我們把上下限代進去，再相減就是了。故此若只看由3到4這一段定積分就是$\frac{1}{2}(4)^2-\frac{1}{2}(3)^2=\frac{7}{2}$。數學家用$\int_3^4 xdx=\frac{1}{2}x^2\Big|_3^4$來表示，意思就是：先有$\int xdx=\frac{1}{2}x^2$，若計算$\int_3^4 xdx$，就把4代入$\frac{1}{2}x^2$，再把3代入$\frac{1}{2}x^2$，然後依次序相減，亦即$[\frac{1}{2}(4)^2]-[\frac{1}{2}(3)^2]$。

再多看一些例：

由於

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

還原：$\int nx^{n-1}dx = x^n$。
例如$\int 9x^8dx = x^9$　　　　（$n = 9$）
或者　$\int x^8dx = \frac{x^9}{9}$

若要計算$\int_a^b x^8dx$由$a = 5$到$b = 6$，那就是

$$\frac{6^9}{9} - \frac{5^9}{9}$$

其實如前面所說，利用電腦軟件，一按鍵甚麼都給您搞掂了！

升級版 — 微分概念的更深層認識

從上面，我們除了對微分的概念有了基本的認識，透過電腦的幫忙，我們可以找出常見函數的導數，從而找出斜率。若有最大值或最小值亦可把它們找出來。但其實導數還有其他幾何意義。此外，還有一些其他法則。這對於我們進一步了解微分和將來研習微分學理論的部分是相當重要的。讓我們逐一介紹。

導數的幾何意義

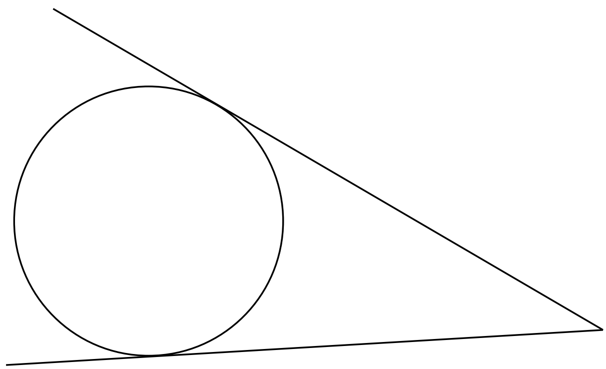


圖 25: 圓的切線

雖然電腦可以幫助我們解決計算常見函數導數的問題，但從函數的圖像，具體地理解**導數的意義**是重要的。從上面可以看到了：導數所涉及的斜率與切線有密切關係。我們在中學「圓的基本性質」中，曾經學習過曲線的**切線**概

念，例如圓的切線（圖25）。切線就是剛剛碰觸到[6]（廣州俚語叫「掂到」。其實是「黏到」— touch）曲線的直線。你看看圖9中的三角形斜邊就是剛剛碰到曲線的直線了。事實上，形態光滑[7]的函數圖像上的各點，均可畫出唯一的、通過該點的切線。這切線的位置與方向，會隨點的位置變化而不同。但細心分析先前有關導數概念的討論，便會發現，函數圖像每點的切線斜率，正是函數導數在該點上的值。我們更可利用這點得出

「函數在某點的微分是否存在？」

就等同於[8]

「函數圖像在該點是否有切線？」

此判別法則對推廣微分概念到高維世界，是十分重要的。作為一種實驗，大家不妨以$y = x^2$為例，看看各點的微分值與該點切線的斜率原來是相等的，真是有趣！

變化率

要精確地描述數量之間的相對變化，是數學的重要課題，比率、變化率的概念正是這樣產生的。例如速率就是表達時間與距離之間相對變化的數學概念，距離隨著時間而變

[6] 直線與曲線相切於點(x, y)是指在(x, y)的附近「掂到」，但該直線與曲線還可能在遠一點的地方再相交的。

[7] 光滑當然是可導的意思。

[8] 等價。

化，時間的變化導致距離的變化。我們稱時間為**自變量**，距離為**應變量**。變量的關係在數學中，是以函數的概念加以描述的。以t表示經歷的時間，$y = f(t)$表示所走的距離，由$t = A$到$t = B$的平均速率（平均變化率）就是：$V_{AB} = \frac{f(B)-f(A)}{B-A}$。這變化率的計算是可被容易理解的，它是函數圖像上兩點$(A, f(A))$及$(B, f(B))$的連線所成斜坡的斜率！但當$y = f(t)$的圖像是曲線而非直線時，它卻不能告訴我們$y = f(t)$在$t = A$時的導數 — 「走勢率」是甚麼（比較圖9及14）！

要尋找函數在一特定點的導數，關鍵是我們如何將尋找函數圖像$y = f(x)$在該特定點的「斜坡」（如圖9所示）及計算對應斜坡的斜率，大數學家費馬（Pierre de Fermat, 1601-1665）提供了一個好方法，這也是上面我們一直沿用的（圖10）。從圖26上的定點$P\,(a, f(a))$出發，讓a變化成$a + h$時，$(a, f(a))$會變成點$Q\,(a + h, f(a + h))$，考慮連結PQ所形成的斜坡，及其斜率m_{PQ}，如圖26所示

得

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

考慮連續變化的h，h趨向於0，h可正可負，則Q趨向於P，且斜坡的斜邊會趨於一「終極」位置的直線 t（固然，我們假定函數的圖像足夠光滑），直線t的斜率m便是函數$y = f(x)$在$x = a$的導數了（圖27-28）！這也是我們在圖10的做法。

在高等數學中，上面所描述的過程有更嚴格化的處理，對應的數學理論，稱為極限理論。而斜率的m值，正是對

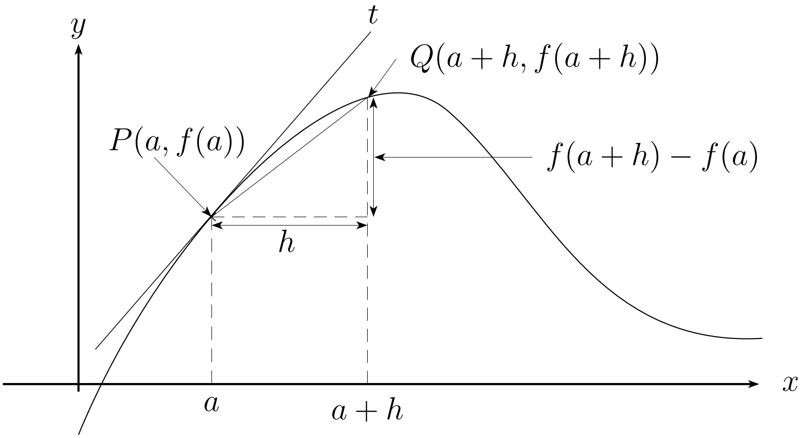


圖 26: 以斜坡計算斜率

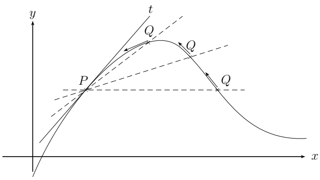


圖 27: 把$h > 0$趨向0

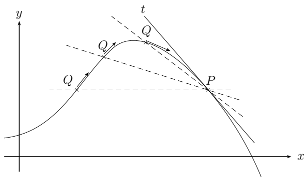


圖 28: 把$h < 0$趨向0

應的m_{PQ}在Q趨向於P時，即h趨向於0時的極限值。應用極限理論的符號，可以這樣的表示（參閱圖29）

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

事實上，「lim」就是由「limit」、「極限」的英語而來的，整個符號的意思是說比值$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$，隨h而變化，當把h愈推愈小，到推至0時，比值會隨之而趨於常數m，m就稱為比值的極限了。這不就是我們上面所做的

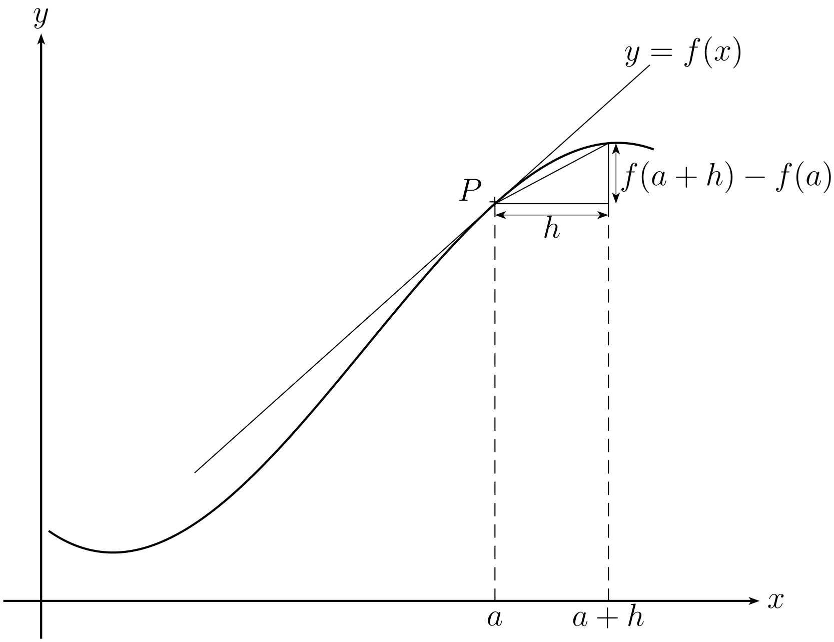


圖 29: 從極限找導數

嗎？精確的微積分理論是以極限理論為基礎的！

說笑的，每次都如此這般的畫一個斜坡，太麻煩了！不過極限的意義十分廣泛，不局限於計算導數，例如計算最終趨向（eventual tendency）（圖30）或某一點的極限（圖31）都是要動用到極限的概念的。

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

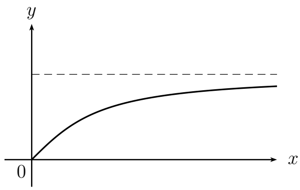


圖 30: 有最終趨向的函數

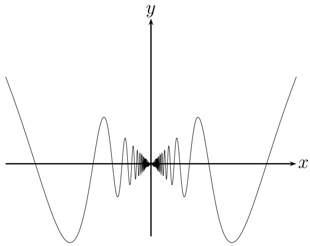


圖 31: $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

要注意的是，由上式我們知道，m是函數$f(x)$從$x = a$到$x = a + h$的平均變化率在$h \to 0$的極限，故m也被稱作函數$f(x)$在$x = a$的「瞬時變化率」，亦即確切於該點的變化率，因為移過一點點，變化率又可能不同了。瞬時變化率這種對導數概念的詮釋，在物理學中極為重要。再回想一下，你便會知道「瞬時變化率」才是「走勢率」這概念的一個準確數學「升級版」表達呢！

導數的幾個計算法則

武俠小說《射鵰英雄傳》有這樣的描述，要使「降龍十八掌」，必須十八掌全套學會，融會貫通，方能發揮它最大的威力。學習計算導數亦然，除了法則（1）-（4）外，我們還得多學三個法則（5）-（7）。

先再詳細解釋法則（4），其實（4）包含兩個法則：

加可分拆來做 ......（＃）

減也可分拆來做 ......（§）

由於兩個情況類似，這裏只就（#）作解釋（其實（#）加上（1）就可以得出（§） — 試試看！），亦即

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}(f(x)) + \frac{d}{dx}(g(x))\ 。$$

要計算$f(x)+g(x)$的導數就要看看x由a轉到$a+h$時的變化。當x由a轉到$a+h$時，函數值就會由$f(a)+g(a)$轉到$f(a+h)+g(a+h)$（圖17）。連接這兩點線段的斜率就會是：

$$\frac{[f(a+h)+g(a+h)]-[f(a)+g(a)]}{h}$$

我們可把它分拆，亦即

$$\frac{[f(a+h)-f(a)]}{h} + \frac{[g(a+h)-g(a)]}{h}$$

你看，當愈h來愈接近 0 時，上式右方的兩項就正好是（f在a的斜率）+（g在a的斜率），亦即

$$\frac{d}{dx}f(x)|_{x=a} + \frac{d}{dx}g(x)|_{x=a}\ ！$$

記號 $\frac{d}{dx}f(x)|_{x=a}$ 表示$f(x)$在a的導數或$f(x)$在a的斜率，其實，不必要把a與x區分，即在上面的計算過程中，索性

寫

$$\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h}$$

就可以了，省了點麻煩。而且，我們甚至可以用$(f+g)(x)$來表示$f(x)+g(x)$，亦即把兩個函數相加起來的意思（圖32）。

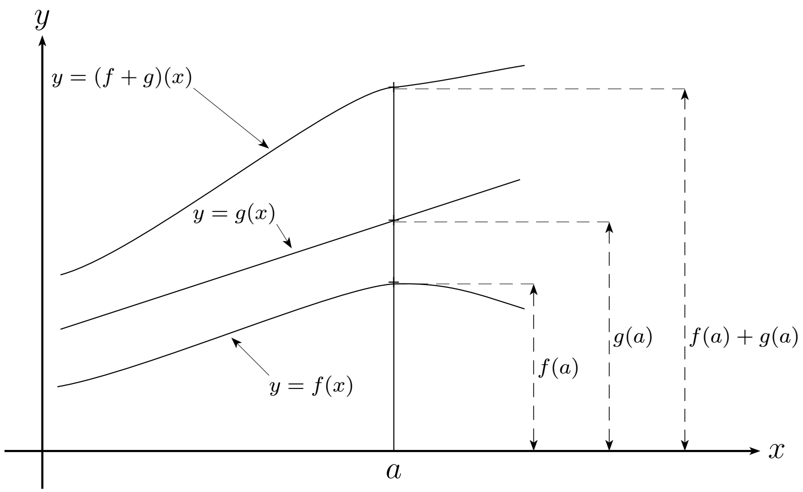


圖 32: 兩個函數加起來了

法則 (5)-(7)

法則（5） 積法則

兩個函數加減後的導數可用分拆來計算，乘起來的話又如何呢？我們依舊有計算函數積（乘起來）的法則，不過沒

有加減那簡單。

若函數$f(x)$及$g(x)$均可計算微分，則他們的乘積也可計算微分，並有：

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\left[\frac{d}{dx}g(x)\right] + \left[\frac{d}{dx}f(x)\right]g(x)$$

這個法則的證明比較複雜，這裏就不談了。應用這法則的做法就好像是「先定了f、導g，再定了g、導f，然後加起來」。讓我們看一些例子。

例A： 已知$\frac{d}{dx}(x) = 1$（$y = f(x) = x$的圖像是斜率為1的直線），可利用積法則計算x^2的導數。

解

$$\frac{d}{dx}\left[x^2\right] = \frac{d}{dx}[x\cdot x] = x\left[\frac{d}{dx}(x)\right]+\left[\frac{d}{dx}(x)\right]x = x\cdot 1+1\cdot x = 2x$$

挑戰題： 已知$\frac{d}{dx}(x) = 1$，n為正整數，試利用積法則證明x^n的導數為nx^{n-1}。

法則（6）　鏈式法則

那末兩個函數的相除（商）又如何？我們仍是有相關的法則的，不過讓我們先看另一個十分有威力的法則。

若函數$f(y)$及$g(x)$均可計算微分，則$f(g(x))$也可計算微分，並有：

$$\frac{d}{dx}\left[f(g(x)\right] = \frac{d}{dy}f(y)\bigg|_{y=g(x)}\frac{d}{dx}g(x)$$

上式中，$\frac{d}{dy}f(y)\Big|_{y=g(x)}$可以看成先計算$f(y)$的微分，再以$y=g(x)$代入答案中。

這個法則就可以讓我們處理 $(2x+1)^9$ 這一類的導數（甚至求 $\sqrt{2x+1}$ 或 $\sin(2x+1)$ 的導數，先決條件是你懂得求 $\sqrt{}$ 和 sin 的導數的話）。事實上，按這個法則：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[(2x+1)^9\right] &= 9(2x+1)^8\frac{d}{dx}(2x+1)\\ &= 9(2x+1)^8(2)\\ &= 18(2x+1)^8\end{aligned}$$

就是那簡單！再看一例。

例B： 已知$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{1}{y^2}$，求$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right)$。

解　考慮函數：$f(y)=\dfrac{1}{y}$，得$f(g(x))=\dfrac{1}{g(x)}$。由鏈

式法則知：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right) &= \frac{d}{dx}\left[f(g(x))\right] \\ &= \left.\frac{d}{dy}f(y)\right|_{y=g(x)} \frac{d}{dx}g(x) \\ &= -\left.\frac{1}{y^2}\right|_{y=g(x)} \frac{d}{dx}g(x) \\ &= -\frac{\frac{d}{dx}\left(g(x)\right)}{g^2(x)}\end{aligned}$$

法則（7）　　商法則

有了鏈式法則，就可得出商法則了！

若函數$f(x)$及$g(x)$均可計算微分，則他們的商也可計算微分，並有：

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]g(x) - f(x)\left[\frac{d}{dx}g(x)\right]}{g^2(x)}$$

證明　　應用積法則（5）於$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)$，得

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{d}{dx}\left[f(x)\frac{1}{g(x)}\right] = \frac{d}{dx}\left[f(x)\right]\frac{1}{g(x)} + f(x)\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right]$$

$$
\begin{aligned}
\text{（應用例B的結果）} &= \frac{d}{dx}\left[f(x)\right]\frac{1}{g(x)} + f(x)\left[-\frac{\frac{d}{dx}g(x)}{g^2(x)}\right] \\
&= \frac{\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]g(x) - f(x)\left[\frac{d}{dx}g(x)\right]}{g^2(x)}
\end{aligned}
$$

善加利用法則（1）-（7）可讓你變成微分計算的能手！

繼續升級路線【9】

經歷了「基礎版」和「升級版」的學習，大家對微積分已有一個最初步的認識。有興趣要繼續往前走，要更深入的學習微積分，體驗它的威力的話，就必須要靠個人的耐心與毅力，找一些介紹微積分的入門書籍，好好的用心學習。這樣下去，才可貫徹升級之路！在這裡，我們將「繼續升級路線」的大概寫下，好讓大家對這升級之路，有一個概略的了解。還要緊記，學習微積分與學習其他數學一樣，要手腦並用，不能「只看不做」，一分耕耘，一分收獲，這是不變的至理！

函數的極限概念

要繼續升級，理解函數及其極限的概念，必不可少，那怕是直觀、「不夠嚴謹」的認識，這對日後的微積分持續學習，非常重要！極限概念是微積分的基石，熟知它的「運算法則」，會讓你更能理解微積分概念的妙處。此外，直觀理解重要的極限如：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$及$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$對「升級」有決定性的作用。

其它函數的導數

透過$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$的計算就可以找出$\sin x$的導數，再透過$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$（及鏈式法則）和$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$等，

所有三角函數都可求導。由$\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$出發，可為$e^x$求導。再透過隱函數的求導方法（及其他技巧），則$a^x$、$\log_a x$等可以求導了，於是乎再加上求導數的加法則、積法則等各種定律，則絕大部分在中學遇到的函數都可以求導了。

高階導數

除了求$\frac{dy}{dx}$外，求取$\frac{d^2y}{dx^2}$[即$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$]，甚至$\frac{d^ny}{dx^n}$技術上並不困難。從速率及加速率不難解釋求$\frac{d^2y}{dx^2}$的用處（當然高階導數在數學上還有其他許多的作用），衆所周知，對於「漂亮」的函數（二次可導）$\frac{d^2y}{dx^2}$乃為斜率之發展狀況（斜率的「變化率」：愈來愈陡還是開始沒那麼陡了），另外在「漂亮」函數的情況下，求$\frac{dy}{dx}$及$\frac{d^2y}{dx^2}$是尋找「駐點」（stationary point）與「拐點」（point of inflection）的方便工具。

微分的其他應用

駐點與拐點當然是導數的常見應用，如上所述，要注意一些特殊（不「漂亮」函數）的情況，如在一些拐點中，使$f(x)$在$x=x_0$不可導也可以有駐點，鄰區極大值與絕對極大值等不同之情況發生。

此外，有了導數，就能找到斜率，那就能找到切線與法

線的方程，則曲線及其他分析性質（如漸近線等）也就可以找出，從而可描劃出曲線來。

積分進一步

求積一般不像求導那麼方便，很多中學裏「常見」的函數（如$\frac{\sin x}{x}$）都不能簡單的求出它的「不定積分」（即找不到$F(x)$使得$F'(x) = \frac{\sin x}{x}$）。值得注意的是雖然求積的技巧繁複，但說穿了還是透過一些方法（如代入法、分部積分法、設$t = \tan\theta$等），把所求的積分，化（「化歸」）成一些可求積的「標準形式」（standard form）作對應的處理。此外，學多了，積分可以有更多的應用，如求體積、表面面積等，於此不贅。

願大家在這升級之路上，樂而忘返！

甚麼樣的數學？

衆所周知，不同的數學觀／數學學習觀會導致不同的數學教材佈置，很難説誰對誰錯，或只可以説，所得出的數學有微細質地上的差異。例如，不少關於新科技對數學教育影響的研究就表明，這不局限於電腦。總的來説，不同的數學工具（tools）其實在改變數學的本質（Artigue，2000；Lopez - Real & Leung，2006；Wong，2003）。數學是否就只是我們今天看到的「固定的數學」呢？ Siu & Siu（1979）便曾提出除了「作為製成品的數學」（mathematics-as-an-end-product）呈現給學生外，也要讓他們看到「製作過程中的數學」（mathematics-in-the-making）。雖然當時提出這個觀點是提供在數學教學中引入數學史的理據，但這宏觀的歷史發展卻大致上與個體的學習歷程相類似。反觀今天的微積分教材，一般的邏輯順序是「極限 — 微分 — 積分」，這種鋪排有一定的合理性，因沒有極限就很難正規的定義微分，沒有微分，作微分的逆就無法定義。這顯然並非歷史的發展過程，也不一定是對於學生最理想的理解方式。

早在古希臘時，阿基米德已利用類似積分的方法去計算直線與$y = x^2$曲線所圍成的面積。我們也不是説歷史的軌跡是倒過來，真實的情況恐怕是極限、微分、積分三個「基石」（姑且如此説之）是交替相互補足地發展的。説句笑話，當年在未有極限的嚴謹定義之前，微積分不也是有許多發展嗎？當然要等到第二次危機出現種種問題後，G. Berkeley（1685-1753）等人提倡要加强分析的嚴謹

性，極限最終得到今天的「$\epsilon-\delta$定義」（A. Cauchy（1789-1851）及K. Weierstrass(1815-1899)）。然而這個定義是否終極版也不是沒有受到挑戰的（如A. Robinson(1918-1974)等人提出的非標準微積分）。

從學生角度來看，能掌握抽象思維的學生當然可以沿用「極限 — 微分 — 積分」的順序來學（我們都是如此學過來的），但顯然地，人（學生）的理解不完全來自定義，定義在不同的情境都經過嚴謹性的連串修飾，方始成形（極限即一典型例子）。無論如何，如果認為列出定義學生就會了解其概念，恐怕距離事實甚遠。

數學是怎樣學的

沿著上面的思路，學習不一定、亦往往不是按照一種「邏輯順序」，我們不是談螺旋式教學法（現時的人對螺旋式教學法太多誤解和太多負面情緒），但有主張我們先學了基本的東西，隨後，反過來作深化理解，亦不無好處的。先舉一例，當年純粹數學科經過長年的討論，不少考試局相關科目委員會委員包括梁鑑添博士均指出其實不用學習極限的嚴格定義（所謂嚴格定義是指Cauchy及Weierstrass的$\epsilon-\delta$定義），有極限的直觀概念（intuitive idea）就夠了（當時純粹數學科課程就是這麼寫的了）。其時引起了一些前線老師的不安。筆者與馮振業先生便寫了一文，就是可以用定義的一些所謂基本性質（defining properties）去取代。這種做法在數學非常

常見，如$\mathbb{R}$定義為序完備的帶序域。文末（這其實是馮先生的精彩意見），我們指出「把嚴格定義放到一邊，先察看『基本性質』，再從基本性質反過來逐步修整至接近嚴格的定義不一定只是教學上權宜之計，它可能正反映著歷史上由初期粗略概念到波折重重（所謂第二次數學危機）到塵埃落定這進程的影子」（黃毅英、馮振業，1997，頁103）。在初稿時，筆者的示意圖其實是像圖33般，是馮先生巧妙地補上一筆，形成圖34。

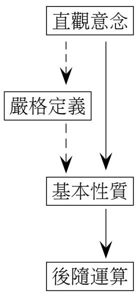


圖 33: 以基本性質代替嚴格定義

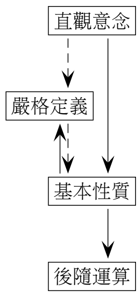


圖 34: 最後又可反溯出嚴格定義來

再者，「知其然」與「知其所以然」也不是截然分割的。這與Skemp(1976)早期的想法不同，詳見Baroody, Reil & Johnson(2007)及Star(2005)等之論述（又見黃毅英，2007c），於此不贅。操作性程式不可取之處在於易令學生不求甚解，但若教師懂得引導，可以從「知其然」的訓練中逐步讓學生「知其所以然」。即教學的流程不一定要依：先全盤了解「其所以然」（這個世界有全面了解這回事嗎？）才進行「知其然」的訓練與應用這模式去鋪排與設計，而「知其然」也不一定會對「知其所以然」構成

窒礙。

關於符號的處理：淡化還是逐漸形式化

符號當然是現代數學的精蘊之一。但同上面的說法一樣，符號屬於一種抽象化的過程，是需要一個歷程的。我們不單是指過早符號化的問題，我們的（教學）立場是，數學符號與名詞大多數不是無根據的。故此，應以概念先行。例如多項式中的常數、係數、「=」等都有其背後的意思。給學生看出何以要有用Σ代表連加$(+\ldots+)$的必要比直接引入Σ更佳。這些都是數學教學的基本常識，於此不贅。

反過來說，新數學時期受到第三次數學危機的餘悸，拚命排拒直觀，把數學符號化和形式化，令數學教育吃了不少苦頭（梁鑑添，1974）。黃毅英（1995）一文就指出，寫著：

> 「$x^2 - 5x + 6 = 0 \;\Rightarrow\; (x-2)(x-3) = 0$
> $\Rightarrow\; (x=2) \vee (x=3)$
> ......可以說是把數學裝扮成最嚇人的模樣放在學生面前 ......啃不下就自己想辦法好了」
> （頁76）

梁鑑添（1984）也提到「不論教甚麼語言，它的嚴謹和準確程度必須和學生的接受能力互相協調才能生效。例如

對初學一種外語的人，教師在語法規則上也不作過於苛刻的要求」（頁72）。當然，符號是有其能量與作用，是需要學習的（Σ和+...+的例就很清楚的），但沿著上面的思路，符號是一種提煉，我們亦認為先了解個中的「知其然」及「知其所以然」，然後慢慢引進適當的符號，其實符號在某意義上可看成是一種縮寫（abbreviation）。

關於數學語言與達意

真正的教學（縱使不會再進一步的説真正的學習）存在於師生的互動中，於課堂主要表現為口授，Ausubel（1961，1968）所説的「有意義的口授」（meaningful verbal instruction），而非教材文本。故此文末亦提到文本起碼就欠缺了教師的指晝，否則學習可以更活潑，更輕鬆（雖然「輕鬆」不是有效學習的指標，我們這裡所指是避免不必要的人為障礙）。

一般人（包括教育界）對於語言及傳意亦存有諸多誤解。最常見的是用字愈精準就愈能達意。上面已提過人普遍不會從定義中了解概念，從證明中了解背後的道理。故此上面的斷言距離現實甚遠，詳情可參見為數不少的關於社群論述和社群建構主義的文章，其中包括經典的Lakatos(1976)及Lampert(1990)。近人多傾慕規範性（恐懼自由？ — 因規範了，就不必冒專業判斷的責任和風險），把名詞用語精準的要求再推上一個極點（黃毅英，2008，2009）。

語言，包括書面語、口語、官定語言、廣用語言（常用語）、教學語言，是複雜的問題，但並不缺乏個中之討論，相關文獻汗牛充棟（南懷瑾(1976)、陸鴻基(2002)、蔣勳(2007)是其中一些，其他論述仍多），筆者並非語文專家，不欲於此作井蛙之見。

返回數學語言，在某個意義來說，情況可以說簡單些，因為它始終是非常統一的，不過其實也不盡然（Wilder，1952，頁283-284），而若集中數學課堂上的語言，實況也可以相當複雜。首先，雖然歷來都有人想建立一種獨立的數學語言（如邏輯主義者），但現實是數學語言與外語有一點點不同的地方，數學語言始終是鑲嵌於廣用語言之內。故此，在數學課堂上，以上種種一般性的語言問題都會出現。

例如，衆所周知「析取」（disjunction）本身來自廣用語言中的「或」。「或」就有時包含「和」，有時不包含「和」（所謂可兼析取inclusive disjunction和不可兼析取exclusive disjunction）。但我們不能說廣用語言這種含混是不對的。故此，當學生解文字題時，無論他用「或」表示可兼或不可兼析取，我們都不能馬上說他錯，因他是在這用廣用語言，而非數學語言。又當學生解（$\ast$）$x^2 - 5x + 6 = 0$時，答「$x = 2$ 和 3」在某種意義來說不能馬上說他（她）不對。因為從廣用語言的角度，這話可以解作「2 和 3 均是（$\ast$）的解」又或「$(2 \in S) \wedge (3 \in S)$」，$S$為（$\ast$）的解集。當然最嚴格是純用數學語言（符號），即$(x = 2) \vee (x = 3)$。但這在學習角度並不是該階段的任務。

回到教學，最基本的問題是，如果利用廣用語言會令學生更明白個中意念(idea)與概念，那又何樂而不為？這就歸到我們一向提出的數學化過程（黃毅英，2007），問題不是棄用廣用語言，而是如何一步一步地由廣用語言修飾到數學語言（黃毅英，2009）。

反過來，學生懂得用「正規」的數學語言，就表示他們明白了嗎？而寫「錯」了，也不一定表示他不明白。作為老師的我們更應考察他們是否明白他們在寫些甚麼。例如，以前有學生寫$\triangle ABC \cong \triangle PRQ$（不順序），仔細問他，他的想法是把$ABC$和$PRQ$看成三角形的全體，就像寫$\triangle X \cong \triangle Y$一樣。其實他是沒有錯的。不過我們可以告訴他，這一來不方便，且別人會誤解（表達presentation的問題）。我們的意見認為他原先的做法在意義上並沒有錯，不過可進一步修飾（流行語：優化！）。

我們亦應解釋標準數學名詞的意義，包括一般意義（如便於表達溝通）和特有意義，如常數何以叫常數，「常」相對於「變」就是不受變項取值的數（其他如函數，係數，升冪數類似）。

從「數學化過程」[9]的角度，數學語言無可避免地建構於日常語言，善用日常語言可以是通往數學語言的助力，而不一定在一起始就排拒於外。

總括而言，雖然數學有其邏輯性的一面，教學也應考慮其知識結構，但學與教從來都不是鐵板一塊。我們必須考

[9]「數學化」作為動名詞(Gerund) 而非形容詞，不只是說「數學多一點」，詳見毅英（2007）。

慮學生的角度，不是刻意遷就他們的喜好，而是配合他們的具體情況，這才會把有效學習變成有可能。

書後記

雖然有不少處理文字的經驗，處理這篇文章實有一點難度。因為全篇文章包含了給學生看的和給教育工作者看的不同部分。所以讀者看起來會有點不習慣是可以預期的。我們最想傳遞的是後者，就是我們對數學教學的一些想法，不過沒有學生部分又無法拱托起背後的理念。

給學生的部分既是「手段」，也是「結果」。我們確信，學生部分足以形成一個自學教材的底稿。何以它仍只是底稿呢？由於篇幅有限，我們不得不把內容濃縮。真的以此教材施教，中間就要加插大量例子和習題，我們沒有這樣做是因為我們仍想把主線放在數學觀的討論上。希望讀者能以此方式理解本文。

然而我們想帶出的，衆所周知，實際教學涉及種種關乎學生如何學習的藝術，例如教學節奏（如學一點、練一點、再學一點）、鞏固、實質感等。故此對於一些學生（「基本用家」），到最後他們所需要知道的是微積分可幫忙他們做些甚麼。運算部分真的交到電腦按鍵就可以了。這好像矮化了微積分（但也是一些朋友不太滿意這文稿的地方 — 見後），但我們總不能無視電腦電腦確能發揮不少運算功能的這個現實。我們所要做的是把這看成第一層的「修練」，沒有桎梏他們的「升呢」（甚至提供他們將來有需要時「升呢」的基礎）就是了。但話雖如此，學生仍希望有些實質操作的經歷。這些操作可以讓他們從一個角度了解概念，亦讓學習多一點實質感。故此我們仍是

把相關部分加進了，理由在前面亦詳述了。

另一個難度是書寫表達的問題。假定這個教材是有導師教導的話（當然我們不排除按教材自學的可能性），中間不少利用口語就可以變得非常簡單直接，例如$\int_3^4 x\,dx = \dfrac{1}{2}x^2\Big|_3^4$。我們會說

1. $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2$
2. $\int_3^4 x\,dx$就是把4和3放進$\frac{1}{2}x^2$，然後相減
3. 那就是$\frac{1}{2}(4)^2 - \frac{1}{2}(3)^2$
4. 這可以用來表示$\dfrac{1}{2}x^2\Big|_3^4$

這其實相當直接了當，但寫下來，看去就感覺很累贅。這種流動性（例如按學生之反應而調節），當然是任何教材或文章都沒法加進去的。故此我們實在不必把所有教學細節都寫進去，教師臨場發揮就好了。

本文不同階段的文稿曾邀不少朋友提供意見（再次感謝！）。筆者們亦就他們有關的意見作出修改。不同的意見和文稿的不同版本就形成一個學術論述（academic discourse），這本身就可以獨立寫成另外一小冊子（不過恐怕有耐性追蹤這條論述軌跡的人不會太多！）。顯然地，一些朋友會較側重數學的完整性，不過從平實的角度看（這多多少少也是本文的定位），若我們只是想介紹兩

位朋友（微分和積分）給學生們，當然我們可堅持把整套「履歷」奉上，因為稍為遺漏變成了誤解，不過從另一角度看（文中其實已交代得頗清楚），若我們相信（建構主義的某些觀點）沒有所謂「完整」和「真正」的理解，了解是一層層的打開（unfold）或建構的話，我們就不妨約大家（學生和兩位新朋友）「茶聚」，順著學生的程度、性向和慣性先有一個第一步的認識（first acquaintance），嘗試使學習者容易掌握（所謂「learner-friendly）」一點。

當然到頭來，以上只是我們的一些看法，也沒有絕對對或不對的數學觀和數學教學觀。不同人按照其觀點可能提出不同的教程，達至不同「質地」的教學效果。若我們邀請不同背景的人就同一課題設計這麼樣的教程可能會表現出不同的觀點。這亦是另一個有趣的項目！

最後要說明的，我們不單只邀請教育界的朋友給意見。其實更應在不同的學生群體「試教」，看看得出甚麼的效果（不一定有效、無效，而是甚麼「質地」的理解）。這又是再一個有趣的課題！

參考文獻

南懷瑾（1976）。《論語別裁・學而第一：三言四語、語文的變與不變》（頁1-4）。臺北：人文世界雜誌社。

梁鑑添（1974）。關於香港中學數學的教育改革。《抖擻》1期，頁36-41。後載蕭文强（1995）（編），《香港數學教育的回顧與前瞻》（頁9-16）。香港：香港大學出版社。

梁鑑添（1984）。評論近二十年來的中學數學課程改革。38期，頁64-75。後載蕭文强（1995）（編），《香港數學教育的回顧與前瞻》（頁31-55）。香港：香港大學出版社。

陸鴻基（2002）。怎樣學好「兩文三語」—— 母語、廣用語文和語文教育。載蔡寶瓊、黃家鳴（編），《姨媽姑爹論盡教改》（頁164-167）。香港：進一步出版社。

黃毅英（1991a）。高科技對學校數學教學的衝擊（上）。《數學傳播》59期，頁103-110。後載黃毅英（編）（1997），《邁向大眾數學之數學教育》（頁185-218）。臺北：九章出版社。

黃毅英（1991b）。高科技對學校數學教學的衝擊（下）。《數學傳播》60期，頁112-118。後載黃毅英（編）（1997），《邁向大眾數學之數學教育》（頁185-218）。臺北：九章出版社。

黃毅英（1995）。普及教育期與後普及教育期的香港數學教育。載蕭文强（編），《香港數學教育的回顧與前瞻》（頁69-87）。香港：香港大學出版社。

黃毅英（2007a）。數學課堂的陷阱與盲點——觀課經驗分享。香港數學教育學會講座，15/12/2007。

黃毅英（2007b）。三次數學危機——個人認知與體會。《中學數學教學研究》。2/2007，頁7-10。

黃毅英（2007c）。數學化過程與數學理解。《數學教育》25期，頁2-18。

黃毅英（2008）。從「華人學習者現象」到「香港學習者現象」。《教育研究與發展期刊》第四卷第二期，頁49-62。

黃毅英（2009）。數學、名詞、語言與傳意。《朗文小學教學教育專訊》17期，頁17-22。

黃毅英、馮振業（1997）。極限的故事。《課程論壇》7期，頁102-105。

黃毅英、張家麟、韓藝詩（2009）。《漫談數學學與教：新高中數學課程延伸部分（單元二）》。香港：課程發展處數學教育組。

蔣勳（2007）。《孤獨六講》。臺北：聯合文學出版有限公司。

Artigue, M. (2001). *Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work.* Paper presented at the CAME meeting, Utrecht, July 2001.

Ausubel, D. P. (1961). In defense of verbal learning. *Educational Theory, XI*, 15-25.

Ausubel, D. P. (1968). Facilitating meaningful verbal learning in the classroom. *The Arithmetic Teacher, 15*, 126-132.

Baroody, A. J., Reil, Y., & Johnson, A. R. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(2), 115-131.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery.* New York, U.S.A.: Cambridge University Press.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal, 27*, 29-63.

Lopez-Real, F. & Leung, A. (2006). Dragging as a conceptual tool in dynamic geometry environments. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 37(6), 665-679.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1 - 36.

Siu, F. K., & Siu, M. K. (1979). History of mathematics and its relation to mathematical education. *International Journal of Mathematics Education for Science and Technology, 10*(4), 561-567.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching* (December), 20-26.

Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 404-411.

Wilder, R. L. (1952). *An Introduction to the Foundations of Mathematics*. New York, U.S.A.: John Wiley & Sons.

Wong, N. Y. (2003). The influence of technology on the mathematics curriculum. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education, Volume 1* (pp. 271-321). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

	數學百子櫃系列	作者
（一）	漫談數學學與教—新高中數學課程必修部份	張家麟、黃毅英、韓藝詩
（二）	漫談數學學與教—新高中數學課程延伸部份單元一	韓藝詩、黃毅英、張家麟
（三）	漫談數學學與教—新高中數學課程延伸部份單元二	黃毅英、張家麟、韓藝詩
（四）	談天說地話數學	梁子傑
（五）	數學的應用：圖像處理—矩陣世紀	陳漢夫
（六）	數學的應用：投資組合及市場效率	楊良河
（七）	數學的應用：基因及蛋白的分析	徐國榮
（八）	概率萬花筒	蕭文強、林建
（九）	數學中年漢的自述	劉松基
（十）	中學生統計創意寫作比賽 2009 作品集	
（十一）	從「微積分簡介」看數學觀與數學教學觀	張家麟、黃毅英